Bac 2022 Nouvelle Calédonie Sciences physiques pour Sciences de l'ingénieur.e
Durée : 30 min **EXERCICE I – ÉTUDES DE MANŒUVRES AVEC UN GYROPODE**
Correction © https://labolycee.org

1. D'après l'énoncé, le système étudié a un mouvement rectiligne uniformément ralenti : le vecteur vitesse a donc pour direction l'axe (AB) et il est orienté de B vers A (dans le sens opposé au mouvement).
On définit un axe horizontal Ox porté par la droite (AB) et orienté positivement de A vers B.

Par définition $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$, par projection sur l'axe Ox on obtient $a_x = \frac{dv_x}{dt}$.

On considère que le mouvement est uniformément ralenti $a_x = \frac{\Delta v_x}{\Delta t}$.

$$a_x = \frac{\frac{(10-16)\text{km}}{1\text{h}}}{1{,}1\text{ s}} = \frac{\frac{(10-16)\times 10^3\text{m}}{3600\text{ s}}}{1{,}1\text{ s}} = -1{,}5\text{ m.s}^{-2}.$$

$a_x < 0$ donc le vecteur $\vec{a}$ est bien orienté de B vers A, il a pour direction la droite (AB).

$a = \|\vec{a}\| = \sqrt{a_x^2}$ = 1,5 m.s^{-2}

2. On cherche à établir l'équation horaire $x(t)$.

D'après la question 1. $a_x = \frac{dv_x}{dt}$ avec $a_x = -1{,}5\text{ m.s}^{-2}$

En primitivant : $v_x = -1{,}5.t + C_1$, or à t = 0, $v_x = v_A$ donc $v_x = -1{,}5.t + v_A$

Par définition $v_x = \frac{dx}{dt}$, ainsi en primitivant on obtient : $x = -1{,}5.\frac{t^2}{2} + v_A.t + C_2$, or à t = 0, $x = x_A$

donc $x(t) = -0{,}75.t^2 + v_A.t + x_A$.

À l'instant t_B = 1,1 s, le système est en B $x(t_B) = -0{,}75.t_B{}^2 + v_A.t_B + x_A$

La distance AB égale à $x(t_B) - x(t_A)$ donc $AB = -0{,}75.t_B{}^2 + v_A.t_B$

$$AB = -0{,}75 \times 1{,}1^2 + \frac{16}{3{,}6} \times 1{,}1 = 4{,}0\text{ m}.$$

Remarque : Le schéma de la figure 2 est assez trompeur, car avec la distance de 4,5 m indiquée, il semble que AB soit largement supérieure à 4,5 m.

3. Première méthode :
Appliquons la 2$^{\text{ème}}$ loi de Newton au système {gyropode et conducteur} dans le référentiel terrestre considéré galiléen : $\Sigma\overrightarrow{F_{ext.}} = m.\vec{a}$

Le système étant soumis à son poids $\vec{P}$, la réaction normale du sol $\vec{R}$ et les frottements $\overrightarrow{F_T}$:

$$\vec{P} + \vec{R} + \overrightarrow{F_T} = m.\vec{a}$$

En projetant sur l'axe du mouvement : $P_x + R_x + F_{Tx} = m.a_x$

Comme $\overrightarrow{F_T}$ et $\vec{a}$ sont orientés vers l'arrière, $0 + 0 - F_T = -m.a$

Ainsi $F_T = m.a$.

$F_T = 110 \times 1{,}5 = 1{,}7 \times 10^2$ N.

Deuxième méthode : On utilise le théorème de l'énergie cinétique.

$$E_C(B) - E_C(A) = \Sigma W_{A\to B}\left(\vec{F}\right)$$

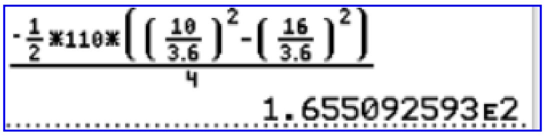
$$\frac{1}{2}.m.\left(v_B^2 - v_A^2\right) = W_{A\to B}\left(\vec{P}\right) + W_{A\to B}\left(\vec{R}\right) + W_{A\to B}\left(\overrightarrow{F_T}\right)$$

$$\frac{1}{2}.m.\left(v_B^2 - v_A^2\right) = \vec{P}.\overrightarrow{AB} + \vec{R}.\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{F_T}.\overrightarrow{AB}$$

$$\frac{1}{2}.m.\left(v_B^2 - v_A^2\right) = \left\|\vec{P}\right\|.\left\|\overrightarrow{AB}\right\|.cos\,90° + \left\|\vec{R}\right\|.\left\|\overrightarrow{AB}\right\|.cos\,90° + \left\|\vec{F_T}\right\|.\left\|\overrightarrow{AB}\right\|.cos\,180°$$

$$\frac{1}{2}.m.\left(v_B^2 - v_A^2\right) = -\left\|\vec{F_T}\right\|.\left\|\overrightarrow{AB}\right\|$$

$$\left\|\vec{F_T}\right\| = \frac{-\frac{1}{2}.m.\left(v_B^2 - v_A^2\right)}{\left\|\overrightarrow{AB}\right\|}$$



$$\left\|\vec{F_T}\right\| = \frac{-\frac{1}{2}\times 110\times\left(\left(\frac{10}{3,6}\right)^2 - \left(\frac{16}{3,6}\right)^2\right)}{4,0} = 1{,}7\times10^2 \text{ N}$$

4. En reprenant la démonstration précédente mais pour un système de masse $m' > m$: $F_T = m'.a'$ donc $a' = \frac{F_T}{m'}$.

Comme $m' > m$ et que F_T n'a pas changé, $a' < a$ donc l'accélération est plus faible : le freinage entre A et B serait moins efficace.

Remarque : on retrouve la notion d'inertie : la masse s'oppose aux effets de la force, plus la masse d'un système est importante et plus il est difficile de le mettre en mouvement ou de modifier son mouvement.

5. $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$ or ici le vecteur vitesse change de direction donc $\frac{d\vec{v}}{dt} \neq \vec{0}$

Le mouvement est circulaire uniforme (car la vitesse reste constante) donc le vecteur accélération $\vec{a}$: - est radial, il a pour direction le rayon du cercle ;

- est centripète, il est orienté vers le centre du cercle ;
- a pour valeur $a = \frac{v^2}{R} = \frac{\left(10/3,6\right)^2}{4,5} = 1{,}7 \text{ m.s}^{-2}$

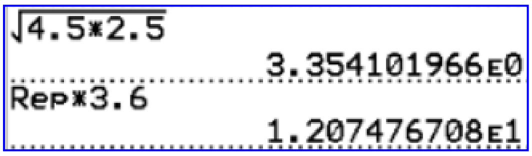
Autre méthode : Dans le repère de Frenet, par définition $\vec{a} = \frac{dv}{dt}.\overrightarrow{u_\tau} + \frac{v^2}{R}.\overrightarrow{u_n}$.

Comme v = Cte alors $\vec{a} = 0.\overrightarrow{u_\tau} + \frac{v^2}{R}.\overrightarrow{u_n} \neq \vec{0}$

$\vec{a}$ a même sens et même direction que $\overrightarrow{u_n}$, donc radial et centripète.

6. Méthode 1 : Notons a_{max} la valeur de l'accélération à ne pas dépasser ($a_{max} = 2{,}5$ m.s^{-2}) :

$$a_{max} = \frac{v_{max}^2}{R} \Leftrightarrow v_{max} = \sqrt{R.a_{max}}$$



$$v_{max} = \sqrt{4{,}5\times 2{,}5} = 3{,}4 \text{ m.s}^{-1} = 3{,}4\times 3{,}6 \text{ km.h}^{-1} = 12 \text{ km.h}^{-1}$$

La vitesse en A était de 16 km.h^{-1} donc largement supérieure : le freinage était nécessaire.

Méthode 2 : on calcule la valeur de l'accélération a_{SF} lors du mouvement circulaire s'il n'y avait pas eu de freinage entre A et B : $a_{SF} = \frac{v_A^2}{R}$.

$$a_{SF} = \frac{\left(\frac{16}{3,6}\right)^2}{4,5} = 4{,}4 \text{ m.s}^{-2}$$

Cette valeur est largement supérieure à la valeur limite de 2,5 m.s^{-2} : il fallait absolument freiner pour éviter le basculement.