Centres étrangers 1 2022 Jour 2 **Correction © https://labolycee.org**

Spécialité physique-chimie

EXERCICE B – MESURE DE LA MASSE DE JUPITER ET DU SOLEIL (5 pts, 53 minutes)

Mots-clés : Lois de Newton, gravitation, mouvement des planètes et des satellites

Exploitation des résultats expérimentaux

1. À partir des résultats expérimentaux (figure 1), préciser la relation qui existe entre T^2 et a^3 pour les quatre satellites de Jupiter. Donner le nom de la loi correspondante (établie en 1618).

La courbe représentative de T^2 en fonction de a^3 a l'allure d'une droite passant par l'origine, que l'on peut modéliser par une fonction linéaire $T^2 = k.a^3$.

T^2 est proportionnelle à a^2.

Il s'agit de la 3e loi de Kepler, que l'on écrit sous la forme $\frac{T^2}{a^3} = k$.

Modélisation du mouvement d'un satellite de Jupiter

2. Sur un schéma, reprendre les éléments donnés sur la figure 2 et représenter sans souci d'échelle :

- Le vecteur vitesse $\overrightarrow{V_S}$ du satellite ;

- La force de gravitation $\overrightarrow{F_{J/S}}$ exercée par Jupiter sur le satellite.

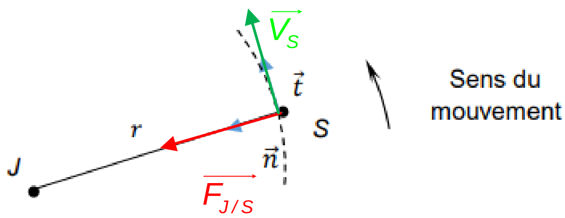


Figure 2.

3. Donner l'expression de la force de gravitation $\overrightarrow{F_{J/S}}$ exercée par Jupiter sur le satellite en fonction de M_J, m, G, r et $\vec{n}$.

$$\overrightarrow{F_{J/S}} = G.\frac{m.M_J}{r^2}.\vec{n}$$

4. Appliquer la deuxième loi de Newton et en déduire l'expression de la vitesse V_S du satellite en fonction de G, M_J et r.

$$\overrightarrow{F_{J/S}} = m.\vec{a}$$

$$G.\frac{m.M_J}{r^2}.\vec{n} = m.\vec{a}$$

$$\vec{a} = G.\frac{M_J}{r^2}.\vec{n}$$

D'autre part, par définition du mouvement circulaire $\vec{a} = \frac{dv}{dt}.\vec{t} + \frac{v^2}{r}.\vec{n}$.

Par analogie entre ces deux expressions du vecteur accélération, on obtient $\frac{v^2}{r} = G.\frac{M_J}{r^2}$.

$$v^2 = G.\frac{M_J}{r}$$

$$v = \sqrt{G.\frac{M_J}{r}}$$

5. En déduire que, dans le cadre de l'approximation du mouvement circulaire, le quotient $\frac{T^2}{a^3}$ est égal à $\frac{4\pi^2}{G.M_J}$.

Le satellite parcourt son orbite de périmètre $2\pi r$ pendant une durée égale à sa période T de révolution : $v = \frac{2\pi.r}{T}$.

$v^2 = \dfrac{4\pi^2.r^2}{T^2}$ et on a établi en 4) que $v^2 = G.\dfrac{M_J}{r}$

Donc il vient $\dfrac{4\pi^2.r^2}{T^2} = G.\dfrac{M_J}{r}$

$$\frac{4\pi^2.r^3}{T^2} = G.M_J$$

$$\frac{r^3}{T^2} = \frac{G.M_J}{4\pi^2}$$

$$\frac{T^2}{r^3} = \frac{4\pi^2}{G.M_J}$$

Dans le cas d'une orbite circulaire le demi-grand axe *a* est égal au rayon du cercle *r*.

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{G.M_J}$$

6. À l'aide des résultats expérimentaux, calculer la valeur de la masse M_J de Jupiter. Commenter un éventuel écart à la valeur tabulée : 1,898 6 × 10^{27} kg.
Aide éventuelle : 1 $j^2.km^{-3}$ = 7,46 $s^2.m^{-3}$

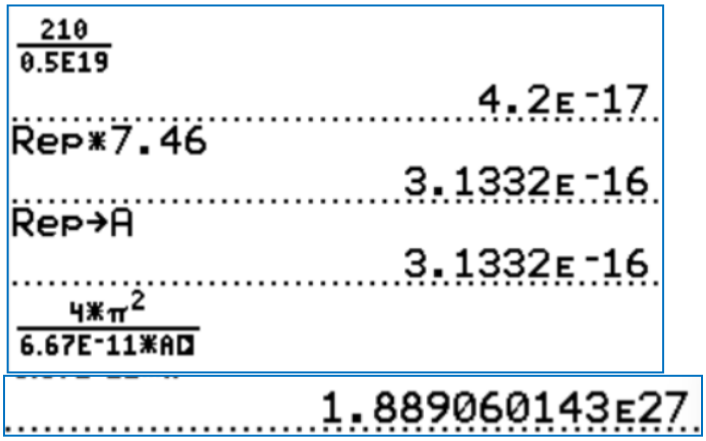
D'après la figure 1, $\dfrac{T^2}{a^3} = k$ où *k* est le coefficient directeur de la droite ; et $\dfrac{T^2}{a^3} = \dfrac{4\pi^2}{G.M_J}$.

Donc $k = \dfrac{4\pi^2}{G.M_J}$ ou $M_J = \dfrac{4\pi^2}{G.k}$

On calcule le coefficient directeur de la droite avec le point de coordonnées (a^3 = 0,50×10^{19} km^3 ; T^2 = 210 j^2).

$k = \dfrac{210\ j^2}{0{,}50\times10^{19}\ km^3}$ = 4,2×10^{-17} $j^2.km^{-3}$ = 4,2×10^{-17} ×7,46 $s^2.m^{-3}$ = 3,1×10^{-16} $s^2.m^{-3}$

$M_J = \dfrac{4\pi^2}{6{,}67\times10^{-11}\times3{,}1\times10^{-16}}$ = 1,9×10^{27} kg



Ce résultat est cohérent avec la valeur tabulée.

7. Déterminer la masse du Soleil.

D'après la 3^e loi de Kepler,

Pour tous les objets en orbite autour du Soleil

$\dfrac{T^2}{a^3} = k$ et d'après Newton, on a $k = \dfrac{4\pi^2}{G.M_S}$

$\dfrac{T^2}{a^3} = \dfrac{4\pi^2}{G.M_S}$ donc $M_S = \dfrac{4\pi^2.a^3}{G.T^2}$

Pour la Terre, *T* = 365,25 j et *r* =*a* = 150×10^6 km = 1,50×10^{11} m.

$M_S = \dfrac{4\pi^2\times(1{,}50\times10^{11})^3}{6{,}67\times10^{-11}\times(365{,}25\times24\times3600)^2}$ = 2,01×10^{30} kg