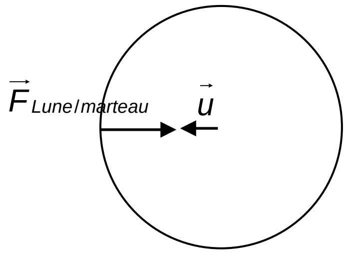
EXERCICE B : Détermination de la masse de la Lune (5 points)

Mots-clés : deuxième loi de Newton, mouvement dans un champ uniforme.

Questions préliminaires

1. Compte tenu de la faible valeur de la hauteur initiale, on considère que la distance entre le centre de la Lune et le marteau tout au long de sa chute est égale au rayon de la Lune R_L. Donner l'expression vectorielle de la force gravitationnelle $\vec{F}_{Lune/marteau}$ modélisant l'action exercée par la Lune sur le marteau en fonction de la masse de la Lune M_L, de la masse du marteau m, du rayon de la Lune R_L et d'un vecteur unitaire $\vec{u}$ orienté du centre de la Lune vers la surface lunaire. Représenter cette force sur un schéma, sans souci d'échelle.

$$\vec{F}_{Lune/marteau} = -G.\frac{M_L.m}{R_L^2}.\vec{u}$$



2. Par approximation, on peut assimiler le champ de gravitation lunaire $\vec{\mathcal{G}}_L$ à la surface de la Lune au champ de pesanteur sur la Lune $\overrightarrow{g_L}$. Montrer que l'expression du champ de pesanteur $\overrightarrow{g_L}$, au lieu où se trouve le marteau sur la Lune, s'écrit : $\overrightarrow{g_L} = -G.\frac{M_L}{R_L^2}.\vec{u}$.

$$\overrightarrow{g_L} = \frac{\vec{F}_{Lune/marteau}}{m} = -G.\frac{M_L}{R_L^2}.\vec{u}$$

3. Montrer que, pendant la chute, le vecteur accélération du marteau $\vec{a}$ vérifie :

$$\vec{a} = \overrightarrow{g_L}.$$

On applique la deuxième loi de Newton au système {marteau} dans le référentiel lunaire supposé galiléen.

$$\Sigma\overrightarrow{F_{Ext}} = m.\vec{a}$$

$$\vec{F}_{Lune/marteau} = m.\vec{a}$$

$$-G.\frac{M_L.m}{R_L^2}.\vec{u} = m.\vec{a}$$

$$-G.\frac{M_L}{R_L^2}.\vec{u} = \vec{a}$$

$$\overrightarrow{g_L} = \vec{a}$$

Problème à résoudre
En s'appuyant sur les questions préliminaires et sur la modélisation de l'évolution temporelle des positions fournie par le tableur, déterminer la masse de la Lune M_L.
L'analyse des données, la démarche suivie ainsi que les calculs doivent être correctement présentés et justifiés. Un regard critique sera porté sur le résultat et des propositions seront faites sur les causes possibles d'un éventuel écart avec la valeur de référence fournie.
Le candidat est invité à présenter sa démarche même si elle n'est pas complètement aboutie.

On souhaite établir l'équation horaire $y(t)$ pour la comparer au modèle obtenu par pointage vidéo.
On a établi $\overrightarrow{g_L} = \vec{a}$
Par projection suivant un axe vertical orienté vers le haut on obtient $a_y = -g_L$

Comme $a_y = \dfrac{dv_y}{dt}$ alors v_y est une primitive de a_y.
$v_y = -g_L.t + C_1$
On détermine la constante C_1 grâce aux conditions initiales.
À $t = 0$, $v_y = -V_0$
Ainsi $v_y = -g_L.t - V_0$

Comme $v_y = \dfrac{dy}{dt}$ alors y est une primitive de v_y.
$y = -\dfrac{1}{2}.g_L.t^2 - V_0.t + C_2$
On détermine la constante C_2 grâce aux conditions initiales.
À $t = 0$, $y = h_0$ (= 1,43 m)
Ainsi $y = -\dfrac{1}{2}.g_L.t^2 - V_0.t + h_0$

Par analogie avec la modélisation obtenue $y = -0{,}865\ t^2 - 0{,}15.t + 1{,}43$,
on en déduit que $-\dfrac{1}{2}.g_L = -0{,}865$, soit $g_L = 2\times0{,}865 = 1{,}73\ m.s^{-2}$.
On a établi précédemment que $\overrightarrow{g_L} = -G.\dfrac{M_L}{R_L^2}.\vec{u}$, ainsi sa norme est $\left\|\overrightarrow{g_L}\right\| = g_L = G.\dfrac{M_L}{R_L^2}$.

$$M_L = \frac{g_L.R_L^2}{G}$$

$$M_L = \frac{1{,}73\times\left(1{,}74\times10^6\right)^2}{6{,}67\times10^{-11}} = 7{,}85\times10^{22}\ \text{kg}$$

D'après les données $M_L = 7{,}34\times10^{22}$ kg.
Ces deux valeurs sont relativement proches.
Écart relatif = $\dfrac{|valeur\ théorique - valeur\ expérimentale|}{valeur\ théorique}$
Écart relatif = $\dfrac{|7{,}34 - 7{,}85|}{7{,}34}$ = 0,069 = 6,9 %
La valeur expérimentale a été obtenue par un pointage vidéo qui peut être responsable de cet écart.
L'étalonnage des distances a pu être mal réalisé.
Le pointage du centre du marteau est sans doute difficile à faire.