Bac 2021 juin (Jour 2) Sciences de l'ingénieur Correction © https://labolycee.org

Partie Sciences physiques Durée : 30 min

EXERCICE A – Étude de la deuxième loi de Kepler

Mots-clés : repère de Frenet ; mouvement circulaire ; lois de Kepler.

Grâce aux données observationnelles constituées par Tycho Brahe, l'astronome Johannes Kepler publie en 1609 et 1619 trois lois :

- première loi : chaque planète décrit une ellipse dont le Soleil occupe l'un des foyers ;
- deuxième loi : le segment Soleil-planète balaie des aires égales pendant des durées égales ;
- troisième loi : le cube du demi-grand axe de l'orbite divisé par le carré de la période de révolution est une constante.

Ces lois ont été énoncées historiquement dans le contexte très spécifique du système solaire. L'objectif de cet exercice est d'interroger plus spécifiquement la deuxième loi.

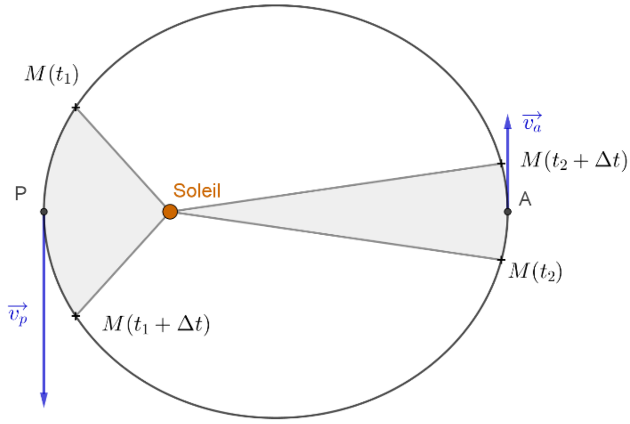
Les orbites elliptiques quasi-circulaires de la Terre et de Mars

Les orbites de la Terre et de Mars sont souvent considérées comme circulaires. Ce sont pourtant des ellipses. Dans le référentiel héliocentrique, la valeur de leur vitesse varie le long de l'orbite entre v_{min} et v_{max}, tout comme la distance Soleil-planète varie entre R_{min} et R_{max}. Le rayon moyen R_{moy} est défini comme le rayon du cercle approximant au mieux la trajectoire de la planète. La vitesse v_{moy} est défini comme la vitesse de la planète sur cette trajectoire circulaire.

Terre	Mars	Jupiter
$v_{Tmin} = 29{,}3\ \mathrm{km.s^{-1}}$ $v_{Tmax} = 30{,}3\ \mathrm{km.s^{-1}}$ $v_{Tmoy} = 29{,}8\ \mathrm{km.s^{-1}}$	$v_{Mmin} = 22{,}0\ \mathrm{km.s^{-1}}$ $v_{Mmax} = 26{,}5\ \mathrm{km.s^{-1}}$ $v_{Mmoy} = 24{,}1\ \mathrm{km.s^{-1}}$	$v_{Jmin} = 12{,}4\ \mathrm{km.s^{-1}}$ $v_{Jmax} = 13{,}7\ \mathrm{km.s^{-1}}$ $v_{Jmoy} = 13{,}1\ \mathrm{km.s^{-1}}$
$R_{Tmin} = 147 \times 10^6\ \mathrm{km}$ $R_{Tmax} = 152 \times 10^6\ \mathrm{km}$ $R_{Tmoy} = 150 \times 10^6\ \mathrm{km}$	$R_{Mmin} = 207 \times 10^6\ \mathrm{km}$ $R_{Mmax} = 249 \times 10^6\ \mathrm{km}$ $R_{Mmoy} = 228 \times 10^6\ \mathrm{km}$	$R_{Jmin} = 741 \times 10^6\ \mathrm{km}$ $R_{Jmax} = 816 \times 10^6\ \mathrm{km}$ $R_{Jmoy} = 778 \times 10^6\ \mathrm{km}$

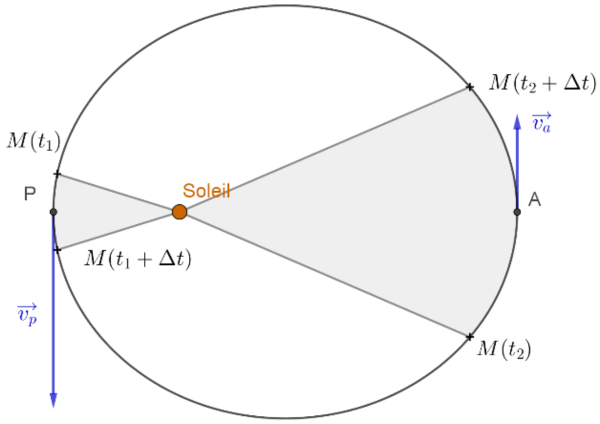
1. ***(1pt) À l'aide de la deuxième loi de Kepler, identifier le schéma correct parmi les suivants. Justifier.***
Pour chaque schéma, on représente la position de la planète au voisinage de son périhélie P (respectivement aphélie A) entre les instants t_1 et $t_1 + \Delta t$ (respectivement t_2 et $t_2 + \Delta t$) ainsi que son vecteur vitesse à cette position dans le référentiel héliocentrique.

a.



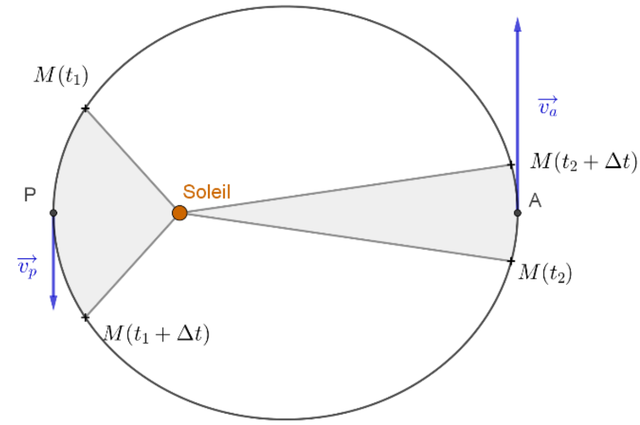
VRAI.

b.



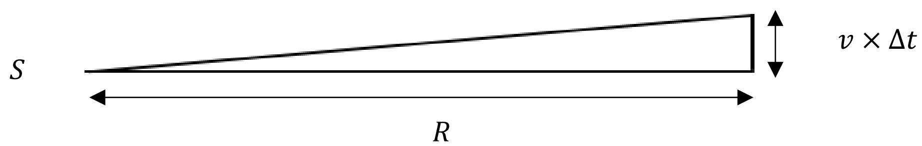
FAUX, l'aire du côté du périhélie P est bien plus petite que celle du coté de l'aphélie A., or ces deux aires doivent être égales.

c.



FAUX, la vitesse au périhélie doit être plus grande qu'à l'aphélie, or ici elle est plus petite.

Lorsque la planète est située à l'aphélie ou au périhélie, le segment Soleil-Terre est perpendiculaire au vecteur vitesse. L'aire balayée par le segment Soleil-Terre pendant une durée Δt courte devant la période de révolution, correspond approximativement alors à l'aire du triangle rectangle ayant pour sommets S, le centre du Soleil, $M(t)$, position de Terre à l'instant t et $M(t+\Delta t)$, position de Terre à l'instant $t+\Delta t$:

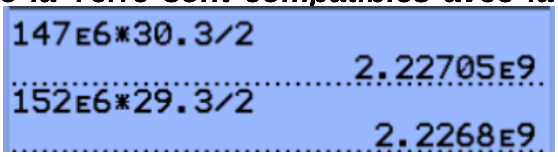


Dans le schéma ci-avant, R est la longueur du segment Soleil-Terre, et $v \times \Delta t$ la distance parcourue par la planète durant la durée Δt à la vitesse v.

2. ***(1pt) Exprimer l'aire balayée par le segment Soleil-Terre durant Δt en fonction de R, v et Δt.***

L'aire du triangle rectangle est égale à $A = (R.v.\Delta t)/2$. (C'est la moitié de celle du rectangle de cotés R *et* $v.\Delta t$)

3. ***(2pts) En déterminant la valeur de l'aire balayée par le segment Soleil-Terre durant $\Delta t = 1\ s$, vérifier que les données dans le cas de la Terre sont compatibles avec la seconde loi de Kepler.***



On utilise les données du tableau de valeurs.
Au périhélie, $A_{péri} = (R_{T\min}.v_{Tmax}.\Delta t)/2$

$A_{péri} = (147\times10^{6}\text{ km} \times 30{,}3\text{ km/s} \times 1\text{ s})/2 = 2{,}27\times10^{9}\text{ km}^2$

À l'aphélie, $A_{apé} = (R_{T\max}.v_{Tmin}.\Delta t)/2$

$A_{apé} = (152\times10^{6}\text{ km} \times 29{,}3\text{ km/s} \times 1\text{ s})/2 = 2{,}27\times10^{9}\text{ km}^2$

Les deux aires sont égales compte tenue de la précision des mesures.

4. ***(1pt) À l'aide des données disponibles déterminer si l'aire balayée durant 1 s est la même pour la Terre et pour Mars.***

Pour Mars à l'aphélie, $A_{apé} = (R_{M\max}.v_{Mmin}.\Delta t)/2$

$A_{apé} = (249\times10^{6}\text{ km} \times 22{,}0\text{ km/s} \times 1\text{ s})/2 = 2{,}74\times10^{9}\text{ km}^2$

L'aire n'est pas la même que pour la Terre.

Pour la suite de l'exercice, on assimilera les orbites à des cercles. On souhaite étudier l'aire balayée en fonction du rayon de l'orbite pendant une même durée. On étudie une planète dont l'orbite est supposée parfaitement circulaire de rayon R. On note M_S la masse du Soleil.

5. ***(3pts) À l'aide de la deuxième loi de Newton, établir l'expression de la vitesse v en fonction de G, R, et M_S : $v = \sqrt{\frac{GM_S}{R}}$.***

Système : {Planète} de masse *M* Référentiel : héliocentrique considéré galiléen

Inventaire des forces : uniquement la force d'attraction gravitationnelle exercée par le Soleil $\overrightarrow{F_{S/P}}$

Deuxième loi de Newton : $\overrightarrow{F_{S/P}} = M.\vec{a}$

$\frac{G.M.M_S}{R^2}.\vec{n} = M.\vec{a}$ avec $\vec{n}$ vecteur radial et centripète.

$\vec{a} = \frac{G.M_S}{R^2}.\vec{n}$

Dans le repère de Frenet, pour un mouvement circulaire et uniforme $\vec{a} = \frac{v^2}{R}.\vec{n}$

Par analogie entre ces deux expressions de $\vec{a}$, on en déduit que $\frac{v^2}{R} = \frac{G.M_S}{R^2}$.

$v^2 = \frac{G.M_S}{R}$ et finalement $v = \sqrt{\frac{G.M_S}{R}}$.

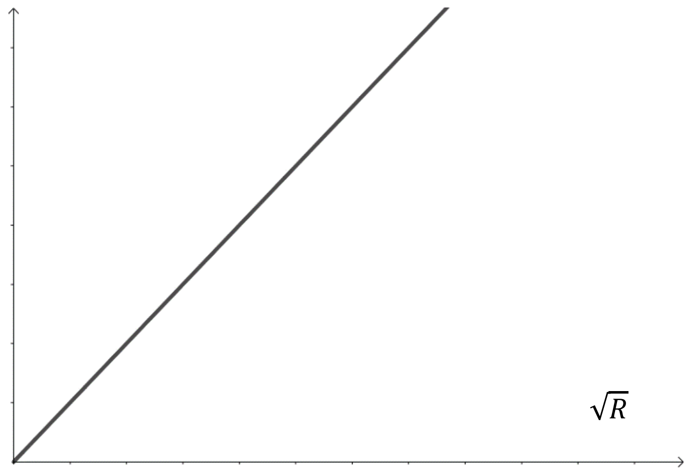
6. ***(1pt) Déterminer l'expression de l'aire balayée durant Δt en fonction de G, R, M_S et Δt.***
À la réponse 2, on a vu que $A = (R.v.\Delta t)/2$,

alors $A = R.\sqrt{\dfrac{G.M_S}{R}}.\Delta t\ /\ 2 = \sqrt{\dfrac{R^2.G.M_S}{R}}.\Delta t\ /\ 2 = \sqrt{G.M_S.R}.\Delta t\ /\ 2$

7. ***(1pt) Identifier le graphique correspondant à l'expression de l'aire en fonction de la racine carrée du rayon parmi les propositions suivantes. Justifier.***

Graphique a

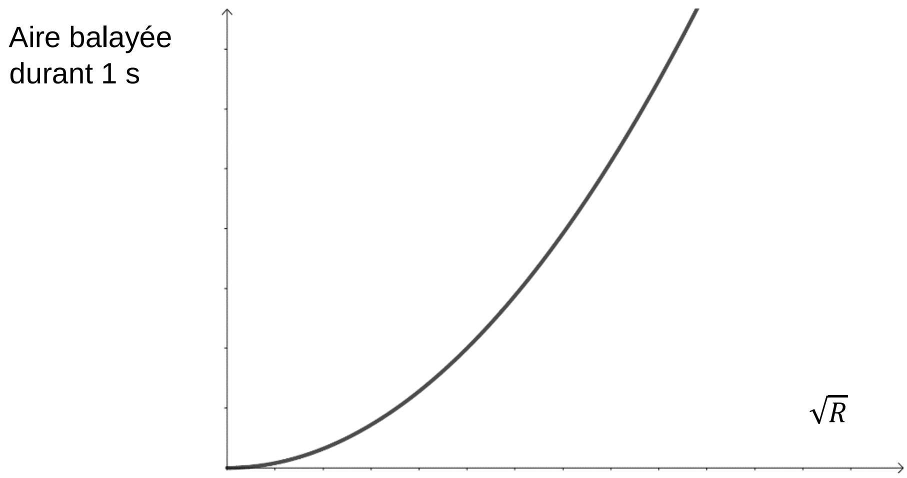
Aire balayée durant 1 s



$A = \sqrt{G.M_S.R}.\Delta t\ /\ 2$ alors l'aire A est proportionnelle à $\sqrt{R}$

La représentation a convient, car elle montre une droite passant par l'origine qui caractérise une fonction linéaire.

Graphique b



Graphique c