EXERCICE III - Un vol inaugural un peu particulier (11 points)

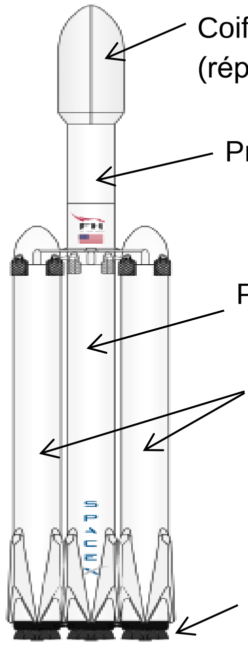
Le 6 février 2018, la compagnie *SpaceX* a procédé au premier vol d'essai de son lanceur spatial lourd *Falcon Heavy*. Ce vol inaugural a mis en orbite autour du Soleil la réplique d'une voiture électrique. L'orbite de cette réplique autour du Soleil est elliptique et elle croise l'orbite de la planète Mars.
Dans cet exercice, on s'intéresse d'abord à une des innovations majeures de ce vol : le retour des propulseurs sur Terre pour une réutilisation ultérieure. On étudie ensuite l'orbite de Mars. Enfin, quelques propriétés thermiques en lien avec les carburants utilisés sont abordées. Les trois parties sont indépendantes.

A - Le retour des propulseurs latéraux sur Terre

Lors du vol d'essai du *Falcon Heavy* la compagnie *SpaceX* a réussi à récupérer intacts les deux propulseurs latéraux à proximité de la zone de décollage, grâce à une manœuvre spécifique.

Données :

- **Schéma descriptif du lanceur spatial *Falcon Heavy***
  Le lanceur spatial possède 27 moteurs de type *Merlin*, 9 moteurs sur chacun des 3 propulseurs allumés au décollage : le propulseur principal et les deux propulseurs latéraux.



- **Caractéristiques d'un propulseur latéral**

Dimension (longueur × diamètre)	44,6 m × 3,66 m
Masse à vide	22,5 tonnes
Masse au décollage (avec ergols)	433,5 tonnes
Masse à l'atterrissage	25,3 tonnes

- Poussée maximale d'un moteur *Merlin* au niveau du sol : 845 kN

La poussée de chaque moteur *Merlin* est modulable entre 50 % et 100 % de la poussée maximale. Elle représente la force subie par la fusée du fait de l'éjection des gaz.

- Valeur du champ de pesanteur au niveau du site d'atterrissage : g = 9,81 m·s^{-2}.

La figure 1 ci-dessous reproduit de façon simplifiée le déroulement de la phase de lancement. Après séparation du propulseur principal, les propulseurs latéraux effectuent une manœuvre de retournement qui leur permet de se mettre dans le même sens qu'au décollage. La descente alterne des phases où des réacteurs sont allumés et des phases où ils sont tous éteints.

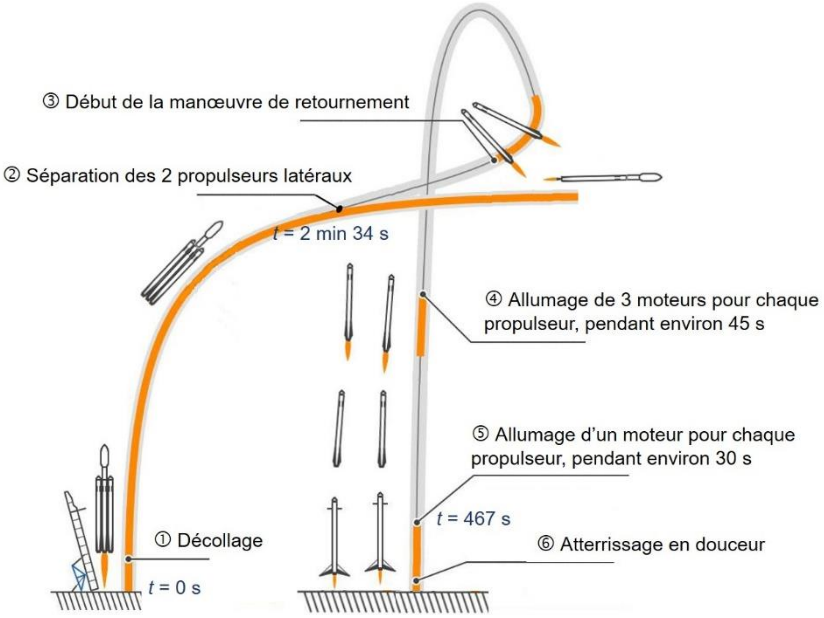


Figure 1. Représentation simplifiée de la récupération des propulseurs latéraux.

On s'intéresse à la phase finale de descente d'un des deux propulseurs, dont on note G_P le centre de masse. Au cours de cette phase, on considère que le mouvement est vertical. L'origine des temps est prise au décollage. Les évolutions temporelles de la norme de la vitesse (notée v) et de l'altitude du point G_P repérée à l'aide d'un axe (Oz) vertical orienté vers le haut et dont l'origine est choisie au sol, sont représentées figure 2 toutes les secondes, à partir de la date t = 420 s jusqu'à l'atterrissage.

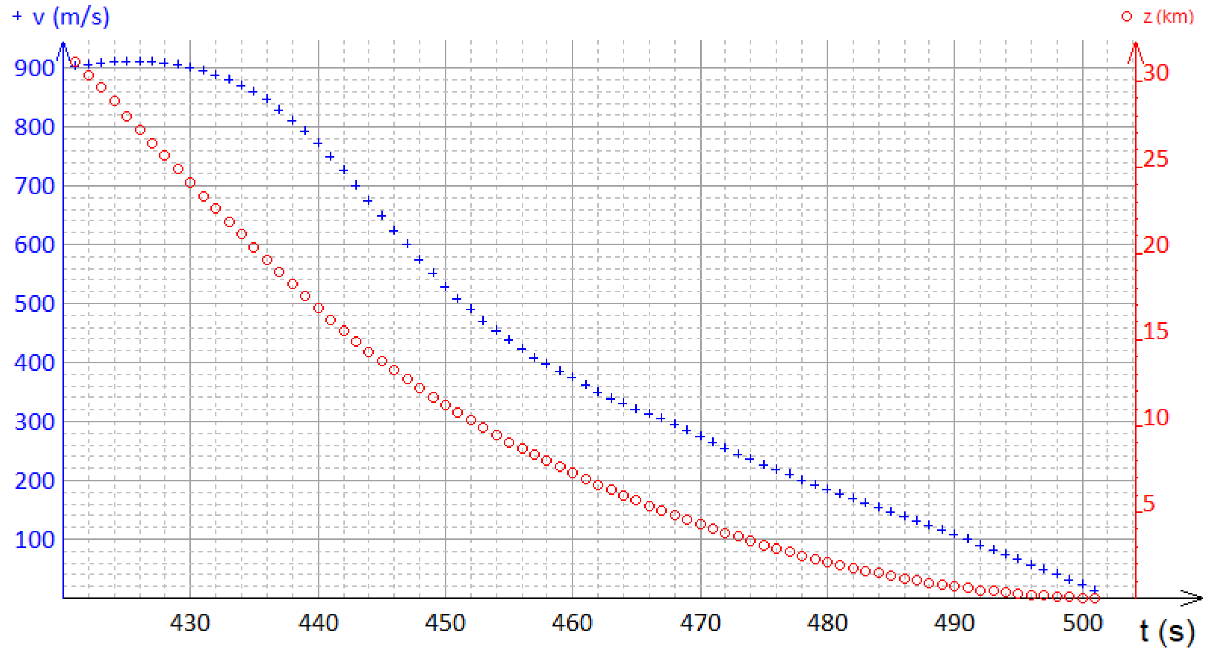


Figure 2. Évolution de la vitesse et de l'altitude d'un propulseur pendant les 80 secondes précédant l'atterrissage (le quadrillage correspond à l'axe de la vitesse).

1. En utilisant le principe d'inertie, interpréter le fait que la vitesse puisse être approximativement constante pendant une certaine durée au cours de la descente alors que les moteurs sont éteints (approximativement entre 420 s et 430 s).

2. Lien entre vitesse et altitude.
   2.1. Faire un schéma (sans souci d'échelle) de la situation lors de la descente sur lequel figurent l'axe (Oz), un vecteur unitaire $\vec{k}$, le point G_P et le vecteur vitesse du centre de masse.
   2.2. Rappeler la définition du vecteur vitesse du centre de masse G_P.
   2.3. Établir la relation entre la norme de la vitesse v et la dérivée de l'altitude z par rapport au temps, et indiquer qualitativement pourquoi cette relation est en accord avec les courbes de la figure 2.
3. Déterminer graphiquement, en explicitant la démarche, la valeur de la norme du vecteur accélération du centre de masse du propulseur dans la dernière phase de l'atterrissage (t > 467 s).
4. Pour modéliser l'atterrissage dans les quatre dernières secondes, on choisit de considérer que l'action de l'air est négligeable (la vitesse étant alors suffisamment faible) et que la masse du propulseur est constante (masse à l'atterrissage notée *M*). On note $\vec{F}$ la force dite *de poussée* exercée sur le propulseur grâce à un unique moteur *Merlin* en marche.
   4.1. Représenter sur un schéma, sans soucis d'échelle, les forces exercées sur le propulseur. Le schéma doit être en accord avec les réponses aux questions précédentes.
   4.2. Exprimer puis évaluer la valeur de la norme de la force de poussée. Commenter le résultat obtenu.

Pour les questions (4.1. et 4.2.), le candidat est invité à prendre des initiatives et à présenter la démarche suivie, même si elle n'a pas abouti. La démarche est évaluée et nécessite d'être correctement présentée.

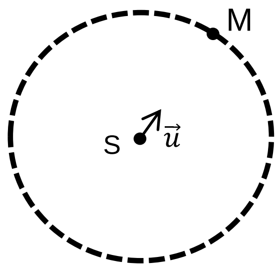
B - Le mouvement de la planète Mars

Le projet prévoyait de mettre initialement la réplique de la voiture électrique en orbite autour de Mars. Elle a finalement été mise en orbite elliptique autour du Soleil, sur une orbite qui croise celle de la planète Mars.

On s'intéresse dans cette partie au mouvement de la planète Mars. On considère que la planète Mars possède une orbite circulaire autour du Soleil.

Données :

- constante de gravitation universelle : $G = 6{,}67 \times 10^{-11}\ m^3 \cdot kg^{-1} \cdot s^{-2}$;
- masse du Soleil : $M_S = 1{,}99 \times 10^{30}$ kg ;
- masse de la planète Mars : $M_M = 6{,}42 \times 10^{23}$ kg ;
- rayon de l'orbite de Mars, considérée circulaire : $d_{MS} = 2{,}28 \times 10^8$ km ;
- trajectoire circulaire du centre de Mars (M) autour du Soleil (centre noté S).
  $\vec{u}$ est le vecteur unitaire orienté de S vers M.



L'étude est conduite dans le référentiel héliocentrique, c'est-à-dire centré sur le Soleil et dont les axes pointent vers des étoiles fixes, considéré comme galiléen.

1. Reproduire sur la copie le schéma représentant la trajectoire circulaire du centre de masse de Mars autour du Soleil et représenter la force exercée par le Soleil sur Mars.
2. Établir l'expression du vecteur accélération du centre de Mars en fonction de G, M_S, d_{MS} et $\vec{u}$.
3. Vitesse de Mars sur son orbite.
   3.1. À l'aide de l'expression du vecteur accélération dans le repère de Frenet, en déduire que le mouvement de Mars, considéré circulaire, est également uniforme dans le référentiel héliocentrique.
   3.2. En déduire l'expression puis la valeur de la vitesse de Mars dans ce référentiel.
4. Exprimer la période, notée T_M, de révolution de Mars autour du Soleil. Vérifier par un calcul qu'elle est voisine de 690 jours.

C - Davantage de carburant dans un même volume

La course aux lanceurs spatiaux impose de trouver un compromis entre masse du lanceur, carburant embarqué, rigidité, sécurité… Augmenter les quantités de carburant et de combustible dans des volumes inchangés, sans augmenter les risques, constitue ainsi un réel enjeu.
Tous les moteurs du *Falcon Heavy* brûlent un mélange de dioxygène liquide (appelé LOX pour *Liquid Oxygen*) et de *Rocket Propellant* (RP-1), une forme de kérozène spécialement raffiné pour être stocké dans les lanceurs spatiaux. Une technique déjà ancienne consiste à baisser la température des carburants et des combustibles en les faisant circuler dans un bain de diazote liquide, afin d'en stocker davantage dans un même volume, pour une pression donnée (de l'ordre de 5 bar). SpaceX a exploité cette technique en refroidissant le LOX d'environ 10 °C par rapport à la fusée précédente *Falcon 9* en amenant sa température à 66 K (- 207 °C). Du fait des gains de densité différents selon l'espèce chimique, il a fallu revoir la taille respective des réservoirs de dioxygène et de kérosène dans la version des *Falcon* 9 : le réservoir de dioxygène a été raccourci et celui de kérosène allongé.

Données :

- température d'ébullition du LOX : −183 °C = 90 K ;
- température d'ébullition du diazote : -196 °C = 77 K ;
- densité du LOX stocké : d_{LOX} = 1,23 ;
- capacité thermique massique du LOX à 66 K : c = 1659 $J{\cdot}kg^{-1}{\cdot}K^{-1}$;
- masse volumique du LOX variant de 4,9 $kg{\cdot}m^{-3}$ par kelvin, à pression constante ;
- masse de LOX stocké dans le réservoir d'un propulseur latéral au moment du décollage : M = 287,4 t.

Pour que l'augmentation de température du LOX dans le réservoir ne soit pas trop importante, le remplissage se fait pendant les 45 minutes précédant le décollage.

1. Le refroidissement du LOX.

1.1. Indiquer le sens du transfert d'énergie qui s'effectue entre le LOX et le diazote liquide, ainsi que la conséquence éventuellement observable pour le diazote.

1.2. Exprimer, puis calculer, l'énergie échangée entre le LOX et le diazote lors du refroidissement de 10 °C du LOX (par rapport à d'autres vols classiques).

Lorsque le réservoir de LOX est rempli, il est au contact de la paroi du réservoir elle-même en contact avec l'air ambiant. Le réservoir est de type « monocoque » et constitué d'un alliage d'aluminium et de lithium.
On s'intéresse ici à la durée approximative à l'issue de laquelle la température du LOX risque de ré-augmenter de 10 °C, ce qui ferait perdre tout le bénéfice du refroidissement.

Pour ceci, on adopte les choix de modélisation suivants :

- la convection étant très importante dans l'air extérieur, on modélise l'air extérieur comme un système à température constante T_{air} ;
- on considère que le flux thermique de l'air vers le LOX à température T peut s'exprimer par la relation $P = hS(T_{air} - T)$ où S est la surface de contact entre l'air et le réservoir et h est une constante caractéristique de l'échange thermique ;
- on considère qu'à l'instant initial (considéré comme l'instant où le réservoir est rempli), $T(t = 0) = T_i = 66$ K.

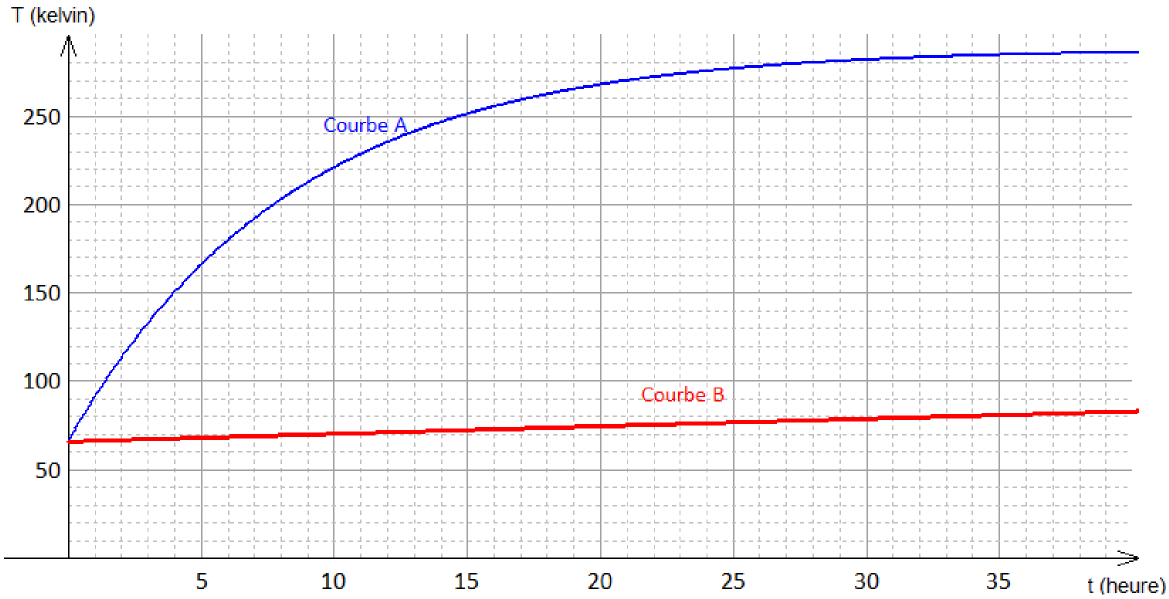
2. À l'aide d'un bilan d'énergie, établir que l'équation différentielle vérifiée par la température du LOX s'écrit $Mc\frac{dT}{dt} = hS(T_{air}-T)$.

3. En déduire que l'expression de la température du LOX au cours du temps s'écrit $T(t)=T_{air} + A{\cdot}exp(-\frac{t}{\tau})$. Exprimer A et τ en fonction de M, c, h, S, T_{air} et T_i et préciser la signification physique de la constante τ.

4. Les deux courbes ci-dessous sont obtenues par simulation en utilisant l'expression de T en fonction du temps obtenue à la question précédente et en choisissant deux valeurs particulières de la constante d'échange h :

$$h_1 = 1{,}0\ \mathrm{W \cdot K^{-1} \cdot m^{-2}} \text{ et } h_2 = 60\ \mathrm{W \cdot K^{-1} \cdot m^{-2}}.$$

La température est indiquée en kelvin, le temps en heure.



4.1. En justifiant la réponse, attribuer une valeur de h à chacune de ces courbes.

4.2. Indiquer la courbe simulée qui semble la mieux rendre compte de la situation réelle étudiée et estimer, dans ce cas, la durée approximative nécessaire pour une augmentation de 10 K de la température du LOX.

5. À l'aide de l'équation différentielle établie à la question 2, justifier que quelle que soit la valeur de la constante d'échange h, la dérivée de la température par rapport au temps $\frac{dT}{dt}$ peut être considérée constante au début du réchauffement (par exemple pour les dix premiers degrés).

6. Discuter le résultat obtenu à la question **4.2.** en menant une analyse des choix de modélisation réalisés.