

## Le jet d'eau de Genève (10 points)

Le jet d'eau de Genève, en Suisse, est l'emblème de la ville. Il permettait à l'origine de contrôler la pression d'une usine hydraulique en laissant s'échapper vers le ciel l'eau en surpression.

Le but de cet exercice est de discuter de deux différentes modélisations permettant d'étudier le mouvement du jet d'eau.

Données techniques :

- hauteur moyenne du jet : 140 m ;
- vitesse de sortie de l'eau : 200 km.h<sup>-1</sup> ;
- débit : 500 L.s<sup>-1</sup> ;
- puissance des pompes : 1000 kW ;
- intensité du champ de pesanteur terrestre :  
 $g = 9,81 \text{ m.s}^{-2}$ .



Figure 1. Jet d'eau de Genève  
(d'après  
[wikipedia.org/ Jet\\_d'eau.jpg](https://wikipedia.org/ Jet_d'eau.jpg))

### 1. Estimation de la hauteur du jet

On souhaite estimer la hauteur du jet à l'aide d'un modèle très simple. On s'intéresse à une goutte d'eau de masse  $m$  initialement au niveau du sol, à qui on communique une vitesse  $v_0 = 56 \text{ m.s}^{-1}$ , soit 200 km.h<sup>-1</sup>, dirigée verticalement vers le haut.

Dans cette partie, on néglige les frottements de l'air sur la goutte. La hauteur du jet est notée  $h_1$ . L'origine des altitudes pour le calcul de l'énergie potentielle de pesanteur est choisie à la surface du lac, où est située la sortie des pompes et l'axe Oz est orienté vers le haut.

- 1.1. Donner l'expression de l'énergie mécanique de la goutte en fonction de sa masse  $m$ , de sa vitesse  $v$ , de son altitude  $z$  et du champ de pesanteur terrestre  $g$ .
- 1.2. En déduire l'expression de l'énergie mécanique en sortie des pompes en fonction de  $v_0$  et  $m$ .
- 1.3. Indiquer en justifiant la valeur de l'énergie cinétique de la goutte en haut du jet. En déduire l'expression de l'énergie mécanique en haut du jet en fonction de la hauteur  $h_1$  du jet, de  $g$  et de  $m$ .
- 1.4. Dans cette partie, on considère que l'énergie mécanique de la goutte se conserve. Estimer la hauteur  $h_1$  du jet. Commenter votre résultat.

## 2. Un modèle plus complexe

Une modélisation plus complexe permet d'obtenir les expressions de l'altitude  $z$  et de la vitesse  $v$  de la goutte en fonction du temps. On utilise le langage python afin d'obtenir le graphique des différentes énergies en fonction du temps.

Dans cette partie, la hauteur du jet est notée  $h_2$ .

Extrait du programme réalisé en python :

```
10 from pylab import *
11
12 #Echelle de l'axe des abscisses
13 t = linspace(0, 4.88, 100)
14
15 #Definition des constantes
16 m = 34*10**-6 #masse d'une goutte d'eau
17 g = 9.81      #champ de pesanteur
18 v0 = 55.6     #vitesse initiale
19 f = 1.24*m
20
21 #Expressions de la vitesse et de l'altitude
22 v = -(g+f/m)*t + v0
23 z = -0.5*(g+f/m)*t**2 + v0*t
24
25 #Expressions des energies
26
27
28 Em = Ec + Ep
29
30 #Courbes des energies
31 plot(t, Ec,"b-.", linewidth=1, label="Ec")
32 plot(t, Ep,"b--", linewidth=1, label="Ep")
33 plot(t, Em,"b-", linewidth=1, label="Em")
34
35 xlabel("Temps (en s)")
36 ylabel("Energies (en J)")
37 legend()
38 show()
```

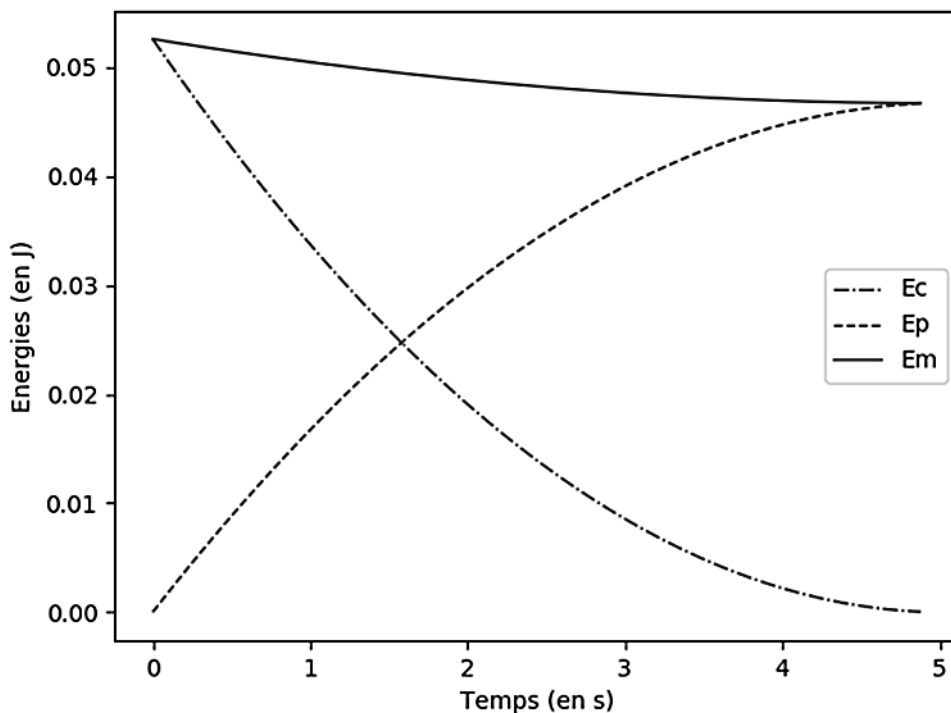


Figure 2. Représentation graphique des énergies obtenue à partir du programme python

- 2.1.** Compléter les lignes 26 et 27 du programme en python afin qu'il permette d'obtenir la représentation graphique de la figure 2.
- 2.2.** Commenter l'évolution de l'énergie mécanique de la goutte obtenue sur le graphique (figure 2). Indiquer en quoi la modélisation choisie ici permet d'obtenir des résultats plus en accord avec la réalité que le modèle proposé dans la partie 1.
- 2.3.** La norme de la force de frottement, supposée constante, qui s'applique sur la goutte est notée  $f$ .
  - 2.3.1.** Relier la variation d'énergie mécanique de la goutte entre sa position haute et sa position basse  $\Delta E_m$  à la hauteur du jet  $h_2$  et à la norme force de frottement  $f$ . En déduire l'expression de  $f$ .
  - 2.3.2.** La valeur choisie dans le programme pour  $f$  permet d'obtenir une valeur de 140 m pour la hauteur  $h_2$  du jet. À l'aide du graphique figure 2, évaluer  $\Delta E_m$ . En déduire la valeur choisie pour la norme de la force de frottement.
  - 2.3.3.** Les équations de la mécanique des fluides permettent d'établir que la force de frottement est proportionnelle au carré de la vitesse de la goutte. Indiquer une éventuelle amélioration à apporter à la modélisation utilisée dans la partie 2. Expliquer votre choix.