

Élimination d'une substance dans le sang

Partie A

On injecte une dose de 1 gramme d'un médicament dans le sang d'un patient. On souhaite étudier la quantité de médicament présente dans le sang en fonction du temps. On sait que le médicament est progressivement éliminé par l'organisme de sorte que, chaque heure, la quantité de médicament présente dans le sang diminue de 30 %.

On modélise cette situation en notant, pour tout entier naturel n , u_n la quantité de médicament (exprimée en grammes) qui est présente dans le sang du patient après n heures écoulées depuis l'injection. Sous ces conditions, on a $u_0=1$.

1- Justifier que, selon cette modélisation, $u_1=0,7$ et $u_2=0,49$.

Une diminution de 30 % correspond à un coefficient multiplication de 0,7. Pour passer d'un terme à l'autre, on multiplie donc par 0,7.

Alors $u_1 = u_0 \times 0,7 = 1 \times 0,7 = 0,7$

$$u_2 = u_1 \times 0,7 = 0,49$$

On admet alors que la suite (u_n) est une suite géométrique de raison 0,7.

2- En déduire, pour tout entier naturel n , u_n en fonction de n .

Le terme général d'une suite géométrique est : $u_n = u_0 \times q^n$

et ici : $u_n = 0,7^n$

3- On sait que le médicament n'est plus actif lorsque la quantité présente dans le sang est strictement inférieure à 0,2 g. D'après cette modélisation, pendant quelle durée le médicament est-il actif ? Expliquer brièvement la démarche.

En testant différentes valeurs de n , on obtient :

$$u_4 \approx 0,24 \quad \text{et} \quad u_5 \approx 0,17$$

Donc le médicament n'est plus efficace après 5 heures.

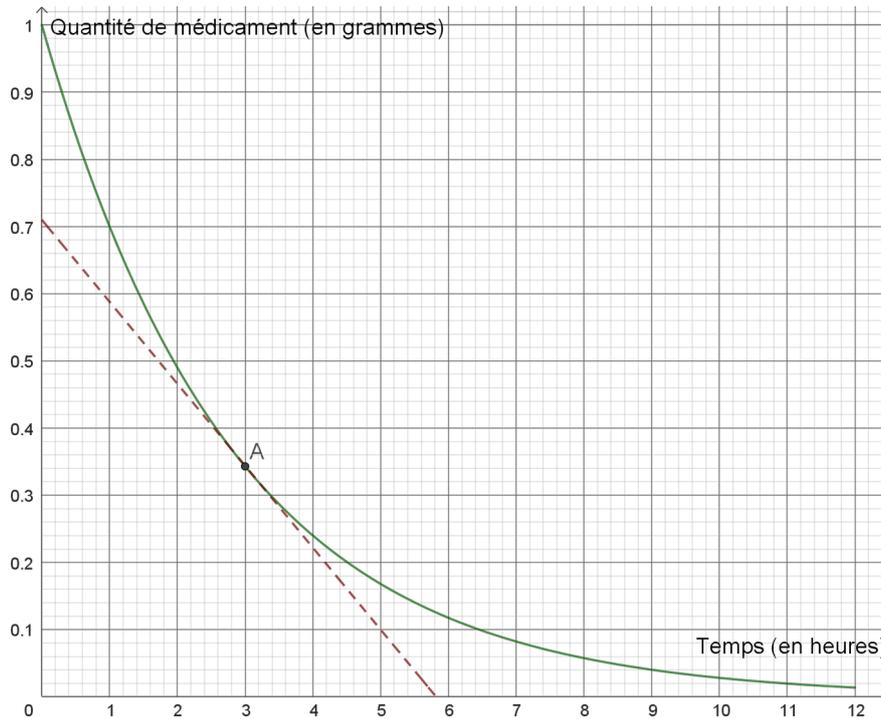
Partie B

Dans cette partie on suppose que la quantité de médicament présente dans le sang du patient (exprimée en grammes) peut être modélisée par la fonction f définie sur l'intervalle $[0 ; 12]$ par $f(t) = 0,7^t$ où t représente le temps écoulé depuis l'injection (exprimé en heures).

Ci-après, on donne la courbe représentative C_f de la fonction f dans un repère orthogonal du

plan.

On a tracé en pointillés la droite tangente à C_f au point A d'abscisse 3.



4- Avec la précision permise par le graphique, répondre aux deux questions suivantes :

4-a- Quelle est la quantité de médicament présente dans le sang trois heures après l'injection ?

$$f(3) \approx 0,35$$

La quantité de médicament au bout de 3 heures est d'environ 0,35 grammes.

4-b- Quelle est la valeur de $f'(3)$? Comment interpréter cette valeur dans le contexte de l'exercice ?

$f'(3)$ est la pente de la tangente tracée.

$$f'(3) = -0,7/6 \approx -0,117$$

Autour de 3 heures, le patient élimine environ 0,117 gramme de médicament par heure.

5-a- Recopier et compléter le tableau de valeurs ci-dessous à l'aide d'une calculatrice (on arrondira à 0,01).

t	4	4,1	4,2	4,3	4,4	4,5	4,6	4,7	4,8	4,9
$f(t)$	0,24	0,23	0,22	0,22	0,21	0,20	0,19	0,19	0,18	0,17

5-b- On rappelle que le médicament n'est plus actif lorsque la quantité présente dans le sang est strictement inférieure à 0,2 g.

Donner une valeur approchée à 0,1 du temps au bout duquel le médicament cesse d'être actif.

D'après le tableau de valeurs précédent, le médicament n'est plus actif au bout de 4,6 heures car $f(4,6) \approx 0,19$

Partie C

On souhaite donner une indication précise sur la durée du principe actif du médicament.

6- D'après vous quel est le modèle le plus pertinent ? Justifier brièvement la réponse.

Le deuxième modèle (fonction) est plus pertinent car plus précis. En effet, les suites ne donnent que des valeurs discrètes car n prend des valeurs entières. Au contraire, les durées utilisées dans le cas des fonctions sont des valeurs réelles.

Partie D

Le médicament a pour but de faire baisser le taux de glycémie chez des patients ayant un taux de glycémie anormalement élevé. Afin de tester l'efficacité de ce médicament sur un groupe de patients (que l'on appellera « groupe-test » par la suite), on procède comme ceci : 60 % des patients de ce groupe reçoivent le médicament et les autres patients reçoivent un placebo.

À l'issue du traitement, on mesure leur taux de glycémie et les résultats sont les suivants :

- chez les patients ayant reçu le médicament, on observe une baisse du taux de glycémie dans 15 % des cas ;
- chez les patients ayant reçu le placebo, on n'observe aucune baisse du taux de glycémie dans 90 % des cas.

On choisit au hasard un patient du groupe-test et on note :

M l'événement « le patient a reçu le médicament »

\bar{M} l'événement « le patient a reçu le placebo »

B l'événement « on observe chez le patient une baisse du taux de glycémie »

Pour y voir plus clair, on peut faire un tableau d'effectifs, en prenant 100 comme total, car les valeurs sont données en %.

	Médicament (M)	Placebo (\bar{M})	Total
Baisse glycémie (B)	$\frac{60 \times 15}{100} = 9$	$40 - 36 = 4$	13
Pas de baisse (\bar{B})	$60 - 9 = 51$	$\frac{40 \times 90}{100} = 36$	87
Total	60	40	100

7- D'après les données ci-dessus, quelle est la valeur de $P_{\bar{M}}(B)$?

Le texte dit : chez les patients ayant reçu le placebo, on n'observe aucune baisse du taux de glycémie dans 90 % des cas. Cela correspond à $P_{\bar{M}}(\bar{B})$. Soit $P_{\bar{M}}(\bar{B}) = \frac{90}{100} = 0,9$.

Alors $P_{\bar{M}}(B) = 1 - P_{\bar{M}}(\bar{B}) = 0,1$.

8- Calculer la probabilité $P(\bar{M} \cap B)$ et interpréter ce résultat.

$P(\bar{M} \cap B) = \frac{4}{100} = 0,04$ ou 4% . Si on tire au hasard un des patients du groupe, il y a 4 % de chances qu'il ait reçu un placebo et qu'il ait vu sa glycémie baisser.

9- On admet que $P(B) = 0,13$. On choisit au hasard un patient du groupe-test et on constate que son taux de glycémie a baissé. Quelle est la probabilité qu'il ait pris le placebo (on arrondira au centième) ?

Ici on nous demande la probabilité conditionnelle $P_B(\bar{M})$. D'après le tableau :

$$P_B(\bar{M}) = \frac{4}{13} \approx 0,31$$

10- À votre avis, peut-on considérer que ce test a prouvé l'efficacité du médicament ? Justifier.

Le but du médicament est de faire baisser la glycémie. Lorsque la glycémie baisse, le patient à reçu le placebo dans 31 % des cas et le médicament dans 69 % des cas. Le médicament semble donc plutôt efficace.