

Étude d'une production

Sur 8 points

Une entreprise produit et vend du savon. Le savon est présenté sous deux formes : sous forme de bloc de savon ou sous forme de savon liquide.

Les deux parties de l'exercice peuvent être traitées de manière indépendante.

Partie A Achat par correspondance de blocs de savon

Pour un achat par correspondance, le client paie le prix des savons proportionnel au nombre de savons contenus dans le lot auquel s'ajoute les frais de port fixes c'est-à-dire indépendant du nombre de savons.

Ainsi l'achat par correspondance d'un lot de dix savons coûte 31 euros tout compris et celui d'un lot de trente savons 81 euros tout compris.

1- Le prix tout compris est-il proportionnel au nombre de savons ? Pourquoi ?

S'il y avait proportionnalité, le prix du lot de 30 savons serait de $31 \times 3 = 93 \text{€}$. Le prix tout compris n'est donc pas proportionnel au nombre de savons.

Cela est dû aux frais de port qui sont fixes, donc non proportionnels.

2-a- Vérifier que le prix d'un savon contenu dans le lot est 2,50 €.

Soit x le prix d'un savon, et F les frais de port fixes. On peut alors écrire le système d'équations :

$$\begin{cases} 10x + F = 31 \\ 30x + F = 81 \end{cases} \quad \begin{cases} F = 31 - 10x \\ 30x + F = 81 \end{cases}$$

On met l'expression de F dans la 2^{ème} équation :

$$30x + 31 - 10x = 81 \quad 20x = 81 - 31 \quad 20x = 50 \quad x = 2,5 \text{€}$$

Puis la valeur de x dans la 1^{ère} $F = 31 - 10 \times 2,5 = 6 \text{€}$

2-b- Quel est le coût total d'un lot de cinquante savons achetés par correspondance ?

$$\text{Prix} = 50 \times 2,5 + 6 = 131 \text{€}$$

2-c- Proposer une formule pour calculer le coût total, noté $c(n)$, d'un lot de n savons, frais de port inclus, où n est un entier naturel.

$$C(n) = 50n + 6$$

3- Les clients par correspondance les plus fidèles bénéficient d'une réduction permanente de 10 % sur le prix des savons et de 50 % sur les frais de port.

3-a- Quel est le coût total d'une commande par correspondance de trente savons pour un client fidèle ?

$$\text{Réduction sur prix d'un savon} = \frac{2,5 \times 10}{100} = 0,25 \text{ €}$$

$$\text{Prix réduit d'un savon} = 2,5 - 0,25 = 2,25 \text{ €}$$

$$\text{Frais de port réduits} = \frac{6}{2} = 3 \text{ €}$$

Donc pour 30 savons : $\text{Coût total réduit} = 30 \times 2,25 + 3 = 70,5 \text{ €}$

3-b- Quel est alors le taux de la remise globale obtenue par un client fidèle pour une commande de trente savons ? On arrondira le résultat à 0,1 %.

Différence de prix = 81 - 70,50 = 10,50 €

$$\text{Taux de remise} = \frac{10,50}{81} \times 100 \approx 13,0 \%$$

Partie B Optimisation de la production de savon liquide

La capacité de production journalière de l'entreprise est de 15 hectolitres de savon liquide. On rappelle qu'un hectolitre est égal à cent litres.

On modélise le coût total, en euro, de fabrication journalière de x hectolitres de savon liquide par une fonction C telle que :

$$C(x) = x^3 - 15x^2 + 75x + 100 \text{ où } x \in [0; 15].$$

4- Le responsable de la fabrication estime que les coûts fixes journaliers liés à la production de savon liquide s'élèvent à cent euros. A-t-il raison ?

Effectivement, sans fabrication de liquide, on a $C(0) = 100$, donc les coûts fixes s'élèvent à 100€.

5- On admet que C est dérivable sur $[0; 15]$ et on note C' la fonction dérivée de la fonction C .

5-a- Calculer $C'(x)$ pour tout réel x appartenant à $[0 ; 15]$.

$$C'(x) = 3x^2 - 30x + 75$$

5-b- Justifier que $C'(x)$ peut s'écrire sous la forme $3(x-5)^2$.

On peut factoriser l'expression de $C'(x)$ par 3 :

$$C'(x) = 3(x^2 - 10x + 25)$$

On reconnaît alors une égalité remarquable et :

$$C'(x) = 3(x-5)^2$$

(Autre possibilité : on peut aussi développer $3(x-5)^2$ et montrer qu'on retombe sur l'expression donnée en 5-a-)

5-c- En déduire le sens de variation de la fonction C sur $[0 ; 15]$.

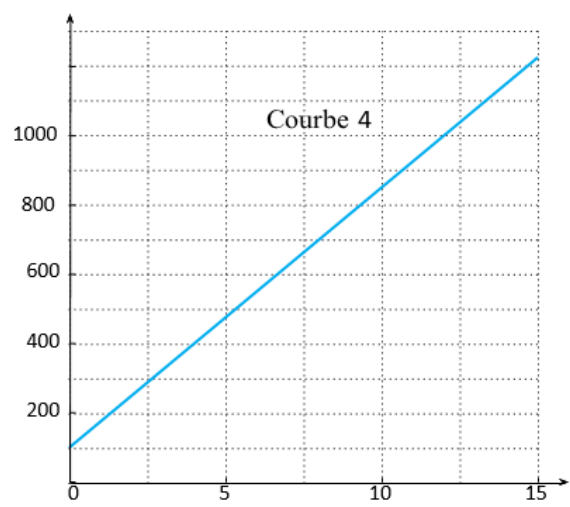
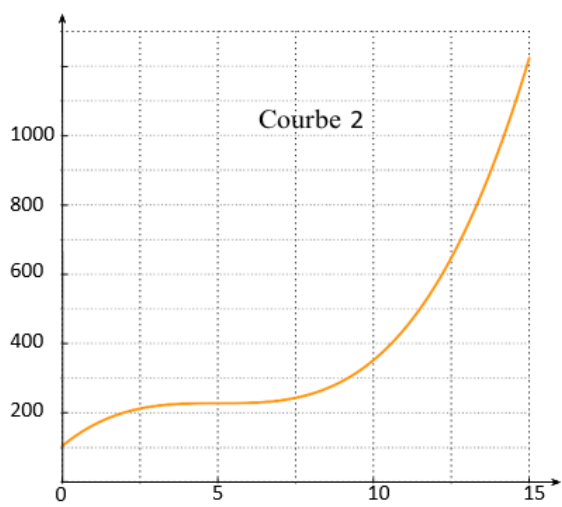
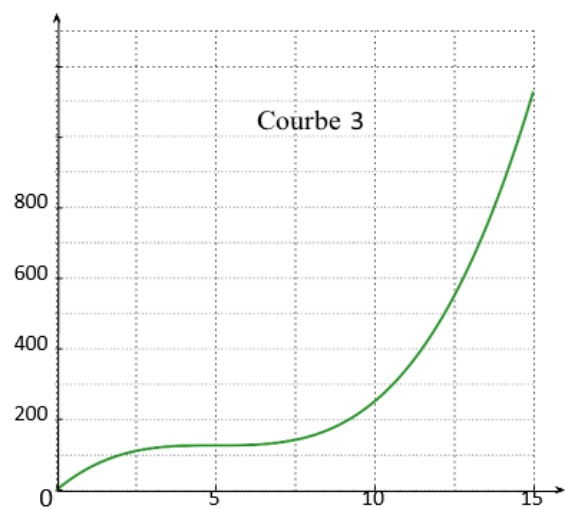
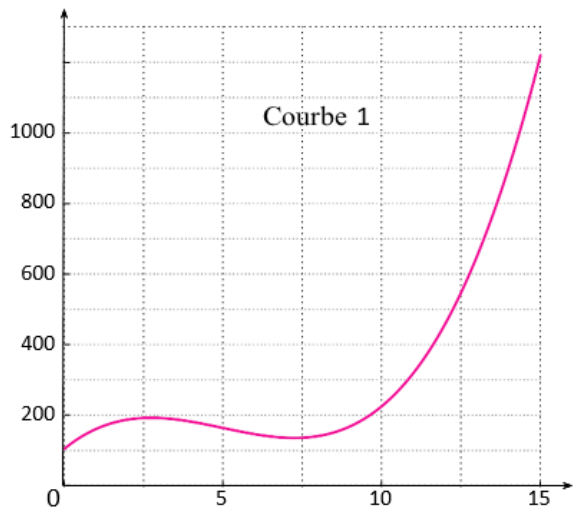
$C'(x)$ est toujours positive, donc la fonction $C(x)$ est croissante sur $[0 ; 15]$

6- On donne **sur la page suivante** quatre courbes dont l'une est la représentation graphique de la fonction C sur $[0 ; 15]$.

6-a- De quelle courbe s'agit-il ? Justifier la réponse donnée.

Ça ne peut pas être la courbe 4 car $C(x)$ n'est pas une fonction affine, ni la 1 car $C(x)$ est toujours croissante. De plus $C(0)=75$. Il s'agit donc de la courbe 2.

6-b- Pour des raisons comptables, l'entreprise ne peut engager des coûts de fabrication de plus de 600 euros par jour. Estimer graphiquement, aussi précisément que possible, la capacité de production journalière de savon liquide autorisée, en expliquant la méthode employée.



Sur la courbe 2, on trace la droite horizontale d'équation $y=600$ (coût de production maximal), puis on trace la verticale partant de l'intersection de cette droite et de $C(x)$ pour lire l'abscisse correspondante :

$$x \approx 14$$

La production maximale est donc de 14 hectolitres environ.