Commercialisation d’un produit

Une petite entreprise fabrique des objets de décoration.

Elle les vend dans deux magasins A et B.

Partie A

Le coût de fabrication annuel des objets de décoration, en euros, peut être modélisé par une fonction C définie sur $[0;250]$ par $C(x)=x^2+100x+50$ où x représente le nombre d’objets fabriqués pendant l’année.

1- Quel est le coût annuel, en euros, pour la fabrication de 100 objets de décoration ?

$\boxed{C(100)=100^2+100\times100+50}$

$\boxed{C(100)=20050}$

Chaque objet de décoration est vendu $300€$. On note B la fonction définie sur $[0;250]$ modélisant le bénéfice annuel.

2- Montrer que $B(x)=-x^2+200x-50$ où x représente le nombre d’objets fabriqués pendant l’année.

$\boxed{Bénéfice=PrixVente-Coût}$

Or $\boxed{PrixVente=300x}$

Donc $\boxed{B(x)=300x-x^2-100x-50}$

Soit $\boxed{B(x)=-x^2+200x-50}$

3- On admet que la fonction B est dérivable sur $[0;250]$.

3-a- Déterminer $B'(x)$ pour $x \in [0;250]$.

$\boxed{B'(x)=-2x+200}$

3-b- Dresser le tableau des variations de la fonction B sur $[0;250]$.

$\boxed{B'(x)=0}$ si $\boxed{-2x+200=0}$

$\boxed{200=2x}$

$\boxed{x=100}$

x	0		100		250
Signe de $B'(x)$		+	0	-	
$B(x)$	-50	↗	9950	↘	-12550

3-c- En déduire le nombre d'objets de décoration à fabriquer et à vendre pendant l'année afin que le bénéfice annuel soit maximal et donner le montant de ce bénéfice.

Le bénéfice est maximal lorsque la dérivée B' est égale à 0. D'après le tableau de variations, la valeur de la fonction B est alors $\boxed{B(100)=9950}$ **.**

Le bénéfice maximal correspond donc à 100 objets de décoration et sa valeur est de 9950€.

Partie B

En 2020, l'entreprise dépose 50 objets de décoration dans le magasin A et 50 objets de décoration dans le magasin B. Pensant pouvoir améliorer son coût de production, elle s'engage à déposer, tous les ans, 5 objets de plus dans le magasin A et 8% d'objets en plus dans le magasin B. On note a_n et b_n le nombre d'objets déposés respectivement dans les magasins A et B l'année $2020+n$.

4-a- Pour tout entier naturel n, exprimer a_{n+1} en fonction de a_n.

$\boxed{a_{n+1}=a_n+5}$

4-b- Quelle est la nature de la suite de terme général a_n ?

(a_n) est une suite arithmétique de raison r=5

Son terme général est $\boxed{a_n=a_0+n\times r}$ **soit** $\boxed{a_n=50+5n}$

4-c- Combien d'objets seront déposés dans le magasin A en 2025 ?

2025 correspond à n = 5.

$\boxed{a_5=50+5\times 5=75}$

En 2025, 75 objets seront déposés dans le magasin A.

5-a- Quelle est la nature de la suite (b_n) ? En préciser les éléments caractéristiques.

Une augmentation de 8 % correspond à un coefficient multiplicateur de 1,08.

(b_n) est donc une suite géométrique de raison q=1,08 et de premier terme 50.

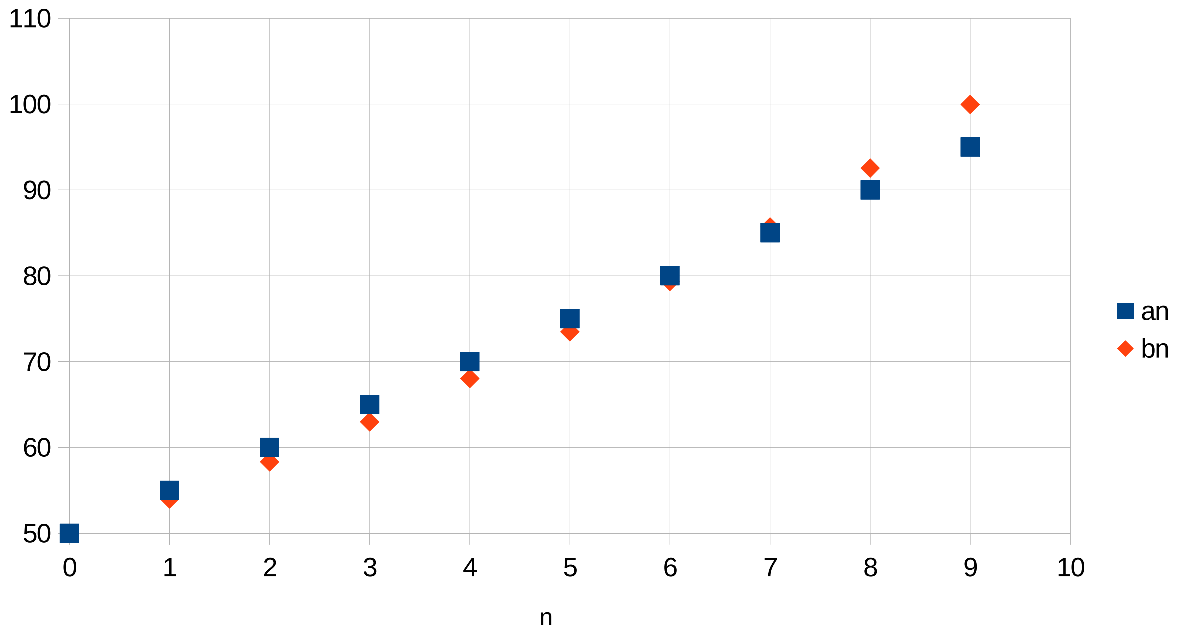
Son terme général est $\boxed{b_n = b_0 \times q^n}$ **soit** $\boxed{b_n = 50 \times 1{,}08^n}$

5-b- Combien d'objets seront déposés dans le magasin en 2025 ?

$\boxed{b_5 = 50 \times 1{,}08^5 \approx 73}$

En 2025, 75 objets seront déposés dans le magasin B.

6-a- Pour tout entier naturel n compris entre 0 et 9, construire dans un même repère les points de coordonnées (n, a_n) et (n, b_n). On prendra 1 cm pour 1 sur l'axe des abscisses et 1 cm pour 5 sur l'axe des ordonnées en commençant à 50.



6-b- En utilisant la représentation graphique précédente et en expliquant la démarche, donner l'année à partir de laquelle le nombre d'objets déposés dans le magasin B sera supérieur au nombre d'objets déposés dans le magasin A ?

On cherche le moment où la courbe représentant la suite (b_n) passe au-dessus de celle qui représente la suite (a_n). Cela se produit pour n=7.

Donc le nombre d'objets déposés dans le magasin B sera supérieur au nombre d'objets déposés dans le magasin A à partir de 2020+7, soit en 2027.