Production de calculatrices

Sur 8 points

L'entreprise CALCULMAT, spécialisée dans la fabrication de calculatrices, souhaite ouvrir une nouvelle chaine de production afin de commercialiser un nouveau produit.

Partie A

L'entreprise possède actuellement deux chaines de production, l'une pour des calculatrices de niveau collège, l'autre pour des calculatrices de niveau lycée. Il arrive que les batteries des calculatrices fabriquées aient un défaut. Dans ce cas, on dira que les calculatrices sont défectueuses.
On prélève 500 calculatrices sur la production actuelle de l'entreprise et on obtient les résultats suivants :

- 300 calculatrices sont de niveau collège ;
- parmi les calculatrices de niveau collège, 6 sont défectueuses ;
- parmi les calculatrices de niveau lycée, 192 ne présentent aucun défaut.

1- Recopier et compléter le tableau croisé des effectifs suivant :

	Calculatrices niveau collège	**Calculatrices niveau lycée**	**Total**
Calculatrices sans défaut	$\boxed{300-6=294}$	**192**	$\boxed{294+192=486}$
Calculatrices défectueuses	6	$\boxed{200-192=8}$	$\boxed{8+6=14}$
Total	**300**	$\boxed{500-300=200}$	500

2- Une calculatrice est choisie au hasard parmi les 500 calculatrices prélevées.

On considère les événements suivants :

- C : « la calculatrice prélevée est une calculatrice de niveau collège » ;
- D : « la calculatrice est défectueuse ».

Les résultats de cette question ***2-*** *seront donnés sous forme de fractions.*

À l'aide du tableau croisé des effectifs, répondre aux questions suivantes :

2-a- Calculer la probabilité qu'une calculatrice prise au hasard soit de niveau collège et soit défectueuse.

$$\boxed{p(C\cap D)=\frac{6}{500}=\frac{3}{250}}$$

2-b- Calculer la probabilité qu'une calculatrice prise au hasard soit défectueuse.

$$\boxed{p(D)=\frac{14}{500}=\frac{7}{250}}$$

2-c- Sachant que la calculatrice prise au hasard est défectueuse, calculer la probabilité que ce soit une calculatrice de niveau lycée.

$$\boxed{p_D(\bar{C})=\frac{8}{14}=\frac{4}{7}}$$

3- En 2019, l'usine de production de l'entreprise CALCULMAT a fabriqué au total 112000 calculatrices de niveaux collège et lycée. La production a augmenté de 23% entre 2019 et 2020, puis elle a baissé de 5% entre 2020 et 2021.

3-a- Calculer le nombre de calculatrices fabriquées en 2020 et puis, en 2021.

Augmenter de 23 % revient à multiplier par ($1+\frac{23}{100}=1{,}23$) .

Diminuer de 5 % revient à multiplier par ($1-\frac{5}{100}=0{,}95$) .

$$\boxed{Nb(2020)=112000\times 1{,}23=137760}$$

$$\boxed{Nb(2021)=137760\times 0{,}95=130872}$$

3-b- Est-il vrai que le taux moyen d'évolution de la production de calculatrices entre 2019 et 2021 est de 18% ? Justifier la réponse.

Les taux d'évolution sont de 23 % puis -5 %.

Le taux moyen est donc de $\frac{23-5}{2}=9\%$.

Donc la proposition est fausse.

Partie B

En 2023, pour la première année, la nouvelle chaîne de production va fabriquer $5\,000$ nouveaux produits. Il est ensuite prévu que la production augmente de 2% tous les ans. On admet que la situation peut être modélisée par une suite (a_n) dont le terme général a_n donne, pour tout entier naturel n, la quantité de produits fabriqués pendant l'année 2023 + n arrondie à l'entier. On a ainsi $a_0=5\,000$.

4- Justifier que $a_1=5100$.

Une augmentation de 2 % correspond à un coefficient multiplicateur de 1,02. Il s'agit donc d'une suite géométrique de raison 1,02. Alors :

$\boxed{a_1 = a_0 \times 1{,}02 = 5100}$

5- Montrer que pour tout entier naturel n, $a_n = 5\,000 \times 1{,}02^n$.

Le terme général d'une suite géométrique est : $\boxed{a_n = a_0 \times q^n}$

et ici : $\boxed{a_n = 5000 \times 1{,}02^n}$

6- Selon ce modèle, calculer le nombre de produits qui seront fabriqués en 2030.

L'année 2030 correspond à n = 7 (car 2030-2023=7).

$\boxed{a_7 = 5000 \times 1{,}02^7 \approx 5743}$

Selon ce modèle, calculer le nombre de produits qui seront fabriqués en 2030 est de 5743.

7- Ce modèle est-il réaliste pour estimer l'année où la production dépassera pour la première fois 9 000 produits ? Justifier la réponse.

En utilisant ce modèle, on cherche le premier terme qui dépasse 9000. En testant différentes valeurs de n, on obtient :

$\boxed{v_{29} = 5000 \times 1{,}02^{29} \approx 8879}$ **et** $\boxed{v_{30} = 5000 \times 1{,}02^{30} \approx 9057}$

D'après ce modèle, la production dépasserait 9000 produits pour n=30, soit en 2053. D'ici là la technologie aura probablement évolué, les besoins ne seront peut-être plus les mêmes, l'effondrement économique aura peut-être eu lieu…

On peut donc douter fortement de la pertinence de ce modèle pour répondre à cette question. Non, ce n'est pas réaliste.

(On peut aussi résoudre l'équation $\boxed{5000 \times 1{,}02^n = 9000}$ **)**